Više gradijentne teorije i kvantna gravitacija

Tijana Radenković

Mentor: dr Marko Vojinović

4. Jul 2023.

Institut za fiziku,
Fizički fakultet,
Univerzitet u Beogradu

Istraživanje sprovedeno uz podršku Fonda za nauku Republike Srbije, broj 7745968, „Kvantna gravitacija preko viših gejdž teorija 2021" — QGHG-2021.

Naučni rezultati

- Higher gauge theories based on 3-groups,
  TR, M. Vojinović,
  JHEP 10 (2019) 222, arXiv: 1904.07566.
- Hamiltonian Analysis for the Scalar Electrodynamics as 3BF Theory,
  TR, M. Vojinović,
  Symmetry 12 (2020) 620, arXiv: 2004.06901.
- Gauge symmetry of the 3BF theory for a generic semistrict Lie 3-group,
  TR, M. Vojinović,
  Class Quantum Gravity 39 (2022) 135009, arXiv: 2101.04049.
- Topological invariant of 4-manifolds based on a 3- group,
  TR, M. Vojinović,
  JHEP 07 (2022) 105, arXiv: 2201.02572.

Sadržaj

UVOD

Teorije kvantne gravitacije u okviru kovarijantnog pristupa definišu se kvantovanjem BF teorije sa vezama za Lijevu grupu G,

$$S_{BF} = \int_{\mathcal{M}_4} \langle B \wedge F \rangle_{\mathfrak{g}} \, .$$

↪ *Ponzano-Redže model* $3D$ gravitacije za $SU(2)$ grupu. Ponzano i Redže, 1968.

↪ *Baret-Krejn model* $4D$ gravitacije za $SO(3,1)$. Baret i Krejn, 1998.

↪ *EPRL/FK model* $4D$ gravitacije tzv. ***model spinske pene***.

Dž. Engl, R. Pereira, E. Livajn i K. Roveli, i L. Fridel i K. Krasnov 2008.

↪ Svi ovi modeli su fokusirani na definisanje *teorije čiste gravitacije bez materije*.

↪ Pokušaji da se u teoriju uključi materija imali su ograničenog uspeha, uglavnom zbog činjenice da maseni članovi ne mogu biti izraženi u okviru ove teorija (polja tetrada nisu prisutna u topološkom sektoru BF teorije).

↪ U cilju prevazilaženja problema sa kuplovanjem materije u BF modelima kvantne gravitacije, u okviru formalizma teorije kategorija razvija se nov pristup koji koristi kategorijsku generalizaciju BF dejstva.

$$S_{2BF} = \int_{\mathcal{M}_4} \langle B \wedge \mathcal{F} \rangle_{\mathfrak{g}} + \langle C \wedge G \rangle \,.$$

↪ *Spin-kub model* $4D$ gravitacije za Poenkareovu 2-grupu. A. Miković i M. Vojinović 2012.

↪ Ovaj rezultat otvorio je mogućnost kuplovanja materije sa gravitacijom na pravolinijski način.

Kategorijske lestvice

- Premda je struktura grupe dovoljna da opiše gejdž polja i struktura 2-grupe uspešno primenjena za opisivanje gravitacionog polja, *nedovoljne su da opišu ostala polja materije*, kao što su skalarno i fermionsko polje.
- Da bi opisali ova polja neophodno je izvršiti još jedan korak **kategorijskih lestvica**, kategorijskom generalizacijom algebarske strukture 2-grupe na strukturu 3-grupe.
- Ispostavlja se da struktura 3-grupe uspešno opisuje sva polja prisutna u Standardnom Modelu kuplovana sa gravitacijom.

kategorijska struktura	algebarska struktura	linearna struktura	topološko dejstvo	stepeni slobode
Lijeva grupa	Lijeva grupa	Lijeva algebra	BF teorija	gejdž polja
Lijeva 2-grupa	Lijev ukršteni modul	diferencijalni Lijev ukršteni modul	$2BF$ teorija	tetrade
Lijeva 3-grupa	Lijev 2-ukršteni modul	diferencijalni Lijev 2-ukršteni modul	$3BF$ teorija	skalarna i fermionska polja

2-ukršteni modul $(L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G, \triangleright, \{\_,\_\}_{\mathrm{p}})$

- ↪ Grupe G, H i L;
- ↪ preslikavanja ∂ i δ ($\partial\delta = 1_G$);
- ↪ dejstvo $\triangleright$ grupe G na sve tri grupe;
- ↪ preslikavanje $\{\_\,,\_\}_{\mathrm{p}}$ – *Pajferovo podizanje*:

$$\{\_\,,\_\}_{\mathrm{p}} : H \times H \to L\,.$$

Ove grupe i preslikavanja moraju zadovoljavati određene aksiome da bi formirali 2-ukršteni modul:

1. $\delta(\{h_1, h_2\}_{\mathrm{p}}) = \langle h_1\,, h_2\rangle_{\mathrm{p}}, \qquad \forall h_1, h_2 \in H,$
2. $[l_1, l_2] = \{\delta(l_1)\,, \delta(l_2)\}_{\mathrm{p}}, \qquad \forall l_1\,, l_2 \in L$. Notacija je $[l, k] = lkl^{-1}k^{-1}$;
3. $\{h_1 h_2, h_3\}_{\mathrm{p}} = \{h_1, h_2 h_3 h_2^{-1}\}_{\mathrm{p}} \partial(h_1) \triangleright \{h_2, h_3\}_{\mathrm{p}}, \qquad \forall h_1, h_2, h_3 \in H;$
4. $\{h_1, h_2 h_3\}_{\mathrm{p}} = \{h_1, h_2\}_{\mathrm{p}} \{h_1, h_3\}_{\mathrm{p}} \{\langle h_1, h_3\rangle_{\mathrm{p}}^{-1}, \partial(h_1) \triangleright h_2\}_{\mathrm{p}}, \qquad \forall h_1, h_2, h_3 \in H;$
5. $\{\delta(l), h\}_{\mathrm{p}} \{h, \delta(l)\}_{\mathrm{p}} = l(\partial(h) \triangleright l^{-1}), \qquad \forall h \in H\,, \quad \forall l \in L.$

3-grupa, tj. 2-ukršteni modul nam dozvoljava da opišemo 3-gejdž teoriju.

↪ Struktura 2-ukrštenog modula dovodi do *3-koneksije*, uređene trojke (α, β, γ), gde su α, β i γ diferencijalne forme elementi algebri,

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \alpha^{\alpha}{}_{\mu}\, \tau_{\alpha}\, \mathrm{d}x^{\mu} \,, & \alpha &\in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4, \mathfrak{g}) \,, \\
\beta &= \beta^{a}{}_{\mu\nu}\, t_a\, \mathrm{d}x^{\mu} \wedge \mathrm{d}x^{\nu} \,, & \beta &\in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4, \mathfrak{h}) \,, \\
\gamma &= \gamma^{A}{}_{\mu\nu\rho}\, T_A\, \mathrm{d}x^{\mu} \wedge \mathrm{d}x^{\nu} \wedge \mathrm{d}x^{\rho} \,, & \gamma &\in \mathcal{A}^3(\mathcal{M}_4, \mathfrak{l}) \,.
\end{aligned}
$$

↪ Zatim definišemo *linijsku, površinsku i zapreminsku holonomiju*,

$$
g = \exp \int_{\gamma} \alpha \,, \quad h = \exp \int_{S} \beta \,, \quad l = \exp \int_{V} \gamma \,.
$$

↪ Odgovarajuća *lažna 3-krivina* $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ definiše se kao:

$$
\mathcal{F} = \mathrm{d}\alpha + \alpha \wedge \alpha - \partial\beta \,, \qquad \mathcal{G} = \mathrm{d}\beta + \alpha \wedge^{\triangleright} \beta - \delta\gamma \,,
$$
$$
\mathcal{H} = \mathrm{d}\gamma + \alpha \wedge^{\triangleright} \gamma + \{\beta \wedge \beta\}_{\mathrm{pf}} \,.
$$

↪ Za mnogostrukost $\mathcal{M}_4$ i 2-ukršteni modul $(L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G\,, \triangleright\,, \{\_\,,\_\}_{\mathrm{pf}})$, odnosno 3-krivinu $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$, definisano je $3BF$ dejstvo kao:

$$S_{3BF} = \int_{\mathcal{M}_4} \langle B \wedge \mathcal{F} \rangle_{\mathfrak{g}} + \langle C \wedge \mathcal{G} \rangle_{\mathfrak{h}} + \langle D \wedge \mathcal{H} \rangle_{\mathfrak{l}}\,.$$

- $3BF$ teorija je topološka teorija,
- struktura 3-grupe,
- generalizacija je BF topološke teorije koja se zasniva na strukturi grupe G.

↪ **Fizička interpretacija** Lagranževih množitelja C i D:

- 1-forma C sa vrednostima u algebri $\mathfrak{h}$ može se interpretirati kao tetradno polje ako je $H = \mathbb{R}^4$:

$$C \to e = e^a{}_\mu(x) t_a \mathrm{d}x^\mu\,,$$

A. Miković i M. Vojinović, arXiv: 1110.4694.

- funkcija D sa vrednostima u algebri $\mathfrak{l}$ može se interpretirati kao set realnih polja, uz odgovarajući izbor grupe L:

$$D \to \phi = \phi^A(x) T_A\,.$$

2-ukršteni modul za (trivijalni) Standardni Model:

- Grupe

$$G = SO(3,1) \times SU(3) \times SU(2) \times U(1)\,, \quad H = \mathbb{R}^4\,, \quad L - \text{sektor materije}\,;$$

- Preslikavanja δ i ∂ su trivijalna — za sve $l \in L$ i $\vec{v} \in H$ definišemo

$$\delta l = 1_H = 0\,, \quad \partial \vec{v} = 1_G\,;$$

- Pajferovo podizanje je trivijalno - za sve $\vec{u}, \vec{v} \in H$ definišemo

$$\{\vec{u}, \vec{v}\}_{\mathrm{pf}} = 1_L\,;$$

- dejstvo $\triangleright$ grupe G na samu sebe je u pridruženoj reprezentaciji;
- dejstvo $\triangleright$ grupe G na H je po vektorskoj reprezentaciji za $SO(3,1)$ sektor i po trivijalnoj reprezentaciji za $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ sektor;
- dejstvo grupe G na L je netrivijalno i zavisi od izbora grupe L - određuje transformaciona svojstva polja.

Kako biramo grupu L?

$\hookrightarrow$ Kako je $\phi = \phi^A T_A$, imamo jedno realno polje $\phi^A(x)$ za svaki generator grupe $T_A \in l$.

$\hookrightarrow$ Koliko je realnih polja potrebno da opiše sektor materije Standardnog modela?

1. generacija leptona	crvena boja 1. genaracija kvarkova	zelena boja 1. genaracija kvarkova	plava boja 1. genaracija kvarkova
$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} u_r \\ d_r \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} u_g \\ d_g \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} u_b \\ d_b \end{pmatrix}_L$
$(\nu_e)_R$	$(u_r)_R$	$(u_g)_R$	$(u_b)_R$
$(e^-)_R$	$(d_r)_R$	$(d_g)_R$	$(d_b)_R$

↪ Koliko realnih komponenti polja imamo u sektoru materije Standardnog modela?

- Fermionski sektor:

$$16\,\frac{\text{spinori}}{\text{familija}}\times 3\,\text{familije}\times 4\,\frac{\text{realna polja}}{\text{spinor}} = 192\,\text{realnih polja}\,\phi^A .$$

- Higsov sektor:

$$2\,\text{kompleksna skalarna polja} = 4\,\text{realna polja}\,\phi^A .$$

- Dobijamo da je struktura grupe L:

$$L = L_{fermion}\times L_{Higgs}\,, \quad \dim L_{fermion} = 192\,, \quad \dim L_{Higgs} = 4\,.$$

↪ Dejstvo $G \triangleright L \to L$ određuje transformacione osobine realnih polja ϕ^A pri Lorencovim i unutrašnjim transformacijama.

↪ G deluje na isti način u svakoj familiji, pa grupa L ima strukturu:

$$L_{fermion} = L_{1st\,family}\times L_{2nd\,family}\times L_{3rd\,family}\,, \quad \dim L_{k-th\,family} = 64\,.$$

- Struktura 3-grupe uspešno daje opis svih polja prisutnih u Standardnom Modelu, u interakciji sa gravitacijom.
- Pored toga, ova struktura prirodno pridružuje *novu gejdž grupu **skalarnim** i **fermionskim** poljima prisutnim u teoriji*, na taj način generalizujući pojam gejdž grupe Jang Milsove teorije.
- Nakon što smo odredili odgovarajuće 3-grupe i konstruisali odgovarajuća $3BF$ dejstva, potrebno je nametnuti odgovarajuće **veze** na stepene slobode prisutne u topološkom sektoru $3BF$ dejstva, tako da dobijemo željenu klasičnu dinamiku polja materije i gravitacije.

↪ Cilj je definisanje konfiguracionog integrala $Z = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}$. Na diskretizovanoj D-dimenzionalnoj mnogostrukosti ima oblik:

$$Z = \sum_{\{\phi\}} \prod_{v\in T} \mathcal{A}_v(\phi) \prod_{\epsilon\in T} \mathcal{A}_\epsilon(\phi) \cdots \prod_{\sigma\in T} \mathcal{A}_\sigma(\phi).$$

1. Napišemo dejstvo u odgovarajućem obliku:

$$S_{OTR}[g] = S_{top}[g] + S_{ostatka}[g].$$

2. Konstruišemo **topološku sumu po stanjima**:

$$Z = \int \mathcal{D}g e^{iS_{top}}.$$

3. Modifikovanjem amplituda na određeni način prelazimo na **sumu po stanjima koja odgovara kompletnoj teoriji**:

$$Z = \int \mathcal{D}g e^{iS_{top}+iS_{ostatka}}.$$

$\hookrightarrow$ Za mnogostrukost $\mathcal{M}_4$ i 2-ukršteni modul $(L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G\,, \triangleright\,, \{\_\,,\_\}_{\mathrm{pf}})$, odnosno 3-krivinu $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$, definisano je $3BF$ dejstvo kao:

$$S_{3BF} = \int_{\mathcal{M}_4} \langle B \wedge \mathcal{F} \rangle_{\mathfrak{g}} + \langle C \wedge \mathcal{G} \rangle_{\mathfrak{h}} + \langle D \wedge \mathcal{H} \rangle_{\mathfrak{l}}\,.$$

$\hookrightarrow$ Dodavanjem veza na topološko dejstvo definisani su fizički relevantni modeli:

$2BF$ **dejstva sa vezama** za:

- *Jang-Milsovo polje,*
- i *Ajnštajn-Kartanovu gravitaciju,*

i $3BF$ **dejstva sa vezama** koja opisuju

- *Klajn-Gordonovo polje,*
- *Dirakovo polje,*
- *Vajlovo polje,*
- i *Majorana polje.*

kuplovana sa gravitacijom na standardan način.

Klajn-Gordonovo polje $\boxed{D = \phi \mathbb{I}}$

TR i M. Vojinović, arXiv: 1904.07566.

↪ 2-ukršteni modul $(L \overset{\delta}{\to} H \overset{\partial}{\to} G\,, \triangleright\,, \{\_\,,\_\})$:

- $G = SO(3,1)\,, \qquad H = \mathbb{R}^4\,, \qquad L = \mathbb{R}\,,$
- $M_{ab} \triangleright P_c = [M_{ab}, P_c]\,, \qquad M_{ab} \triangleright T_A = 0\,,$
- $\partial(P_a) = 0\,, \qquad \delta(T_A) = 0\,, \qquad \{P_a\,, P_b\} = 0\,.$

↪ 3-koneksija $(\alpha\,,\beta\,,\gamma)$: $\boxed{\alpha = \omega^{ab} M_{ab}\,, \qquad \beta = \beta^a P_a\,, \qquad \gamma = \gamma \mathbb{I}\,.}$

↪ 3-krivina $(\mathcal{F}\,,\mathcal{G}\,,\mathcal{H})$: $\boxed{\mathcal{F} = R^{ab} M_{ab}\,, \qquad \mathcal{G} = \nabla \beta^a P_a\,, \qquad \mathcal{H} = \mathrm{d}\gamma\,.}$

↪ Topološko dejstvo: $\boxed{S_{3BF} = \int_{\mathcal{M}_4} B^{ab} \wedge R_{ab} + e_a \wedge \nabla \beta^a + \phi\, \mathrm{d}\gamma\,.}$

$$\boxed{\begin{aligned} S = \int_{\mathcal{M}_4} & B^{ab} \wedge R_{ab} + e_a \wedge \nabla\beta^a + \phi\,\mathrm{d}\gamma - \lambda_{ab} \wedge \left(B^{ab} - \frac{1}{16\pi l_p^2} \varepsilon^{abcd} e_c \wedge e_d\right) \\ & + \lambda \wedge \left(\gamma - \frac{1}{2} H_{abc} e^a \wedge e^b \wedge e^c\right) + \Lambda^{ab} \wedge \left(H_{abc} \varepsilon^{cdef} e_d \wedge e_e \wedge e_f - \mathrm{d}\phi \wedge e_a \wedge e_b\right) \\ & - \frac{1}{2 \cdot 4!} m^2 \phi^2 \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d\,. \end{aligned}}$$

- Opštu relativnost možemo prikazati kao $2BF$ teoriju sa vezama za konkretan izbor 2-grupe simetrija. A. Miković i M. Vojinović, arXiv: 1110.4694.
  - Prednost ove formulacije Opšte relativosti u odnosu na formulaciju preko BF teorije leži u tome što struktura 2-grupe uvodi tetradna polja u topološko dejstvo, što otvara mogućnost kuplovanja materije sa gravitacijom na pravolinijski način.
  - Ipak, polja materije ne mogu biti prirodno izražena u okviru algebarske strukture 2-grupe, tj. sektor materije u dejstvu ne može biti napisan kao zbir topološkog člana i veze.
  - Neophodan je još jedan korak više kategorijske generalizacije BF teorije — tzv. $3BF$ teorija.
- Formulisana je *Ajnštajn-Jang-Milsove teorije*, odnosno teorija gravitacije i gejdž polja kao $2BF$ teorija sa vezama.
- Formulisane su teorije koje opisuju *Klajn-Gordonovo* i *Dirakovo polje* u zakrivljenom prostoru kao $3BF$ dejstvo sa vezama.
- Radi kompletnosti, analizirano je i *Vajlovo* i *Majorana polje* u interakciji sa Ajnštajn-Kartanovom gravitacijom.
- Ovi rezultati su zatim primenjeni za konstrukciju $3BF$ dejstva sa vezama koje opisuje svu materiju prisutnu u Standardnom Modelu kuplovanu sa gravitacionim poljem.
  - Prednost ove formulacije leži u tome što je klasično dejstvo kompletne teorije napisano u obliku pripremljenom za kvantizacionu proceduru spinske pene. TR i M. Vojinović, arXiv: 1904.07566.

GEJDŽ SIMETRIJA $3BF$ TEORIJE

Hamiltonova analiza i generator simetrija

TR i M. Vojinović, arXiv: 2101.04049.

↪ Sprovedena je kompletna Hamiltonova analiza $3BF$ dejstva za opštu semistriktnu Lijevu 3-grupu korišćenjem Dirakove procedure.

↪ Analiza Hamiltonove strukture teorije daje nam algebru veza prve klase i veza druge klase prisutnih u teoriji.

↪ Nakon izračunavanja veza prve klase, generator gejdž simetrija konstruisan je Kastelanijevom procedurom:

$$
\begin{aligned}
G \;=\; & \int_{\Sigma_3} \mathrm{d}^3\vec{x}\Big((\nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^{\alpha})(\tilde{G}_1)_{\alpha} + \epsilon_{\mathfrak{g}}{}^{\alpha}(\tilde{G}_0)_{\alpha} + (\nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^{a}{}_{i})(\tilde{H}_1)_{a}{}^{i} + \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^{a}{}_{i}(\tilde{H}_0)_{a}{}^{i} \\
& + \frac{1}{2}(\nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{l}}{}^{A}{}_{ij})(\tilde{L}_1)_{a}{}^{ij} + \frac{1}{2}\epsilon_{\mathfrak{l}}{}^{A}{}_{ij}(\tilde{L}_0)_{a}{}^{ij} \\
& + (\nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_{i})(\tilde{M}_1)_{\alpha}{}^{i} + \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_{i}(\tilde{M}_0)_{\alpha}{}^{i} + (\nabla_0 \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a})(\tilde{N}_1)_{a} + \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a}(\tilde{N}_1)_{a}\Big),
\end{aligned}
$$

gde su $\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^{\alpha}$, $\epsilon_{\mathfrak{h}}{}^{a}{}_{i}$, $\epsilon_{\mathfrak{l}}{}^{A}{}_{ij}$, $\epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_{i}$, and $\epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a}$ gejdž parametri.

↪ Dobijeni generator zatim koristimo za izračunavanje varijacija formi varijabli i njihovih konjugovanih impulsa $A(t,\vec{x})$, izračunavanjem Poasonove zagrade:

$$\delta_0 A(t,\vec{x}) = \{A(t,\vec{x}), G\}\,.$$

↪ Dobijene varijacije formi nam pomažu da odredimo ukupnu grupu gejdž simetrija $3BF$ dejstva!

Sadržaj

$\hookrightarrow$ Prvo, razmatramo infinitezimalnu transformaciju određenu parametrom ${\epsilon_{\mathfrak{g}}}^{\alpha}$,

$$
\begin{aligned}
\alpha &\to \alpha' = \alpha - \nabla \epsilon_{\mathfrak{g}}\,, & B &\to B' = B - [B, \epsilon_{\mathfrak{g}}]\,,\\
\beta &\to \beta' = \beta + \epsilon_{\mathfrak{g}} \rhd \beta\,, & C &\to C' = C + \epsilon_{\mathfrak{g}} \rhd C\,,\\
\gamma &\to \gamma' = \gamma + \epsilon_{\mathfrak{g}} \rhd \gamma\,, & D &\to D' = D + \epsilon_{\mathfrak{g}} \rhd D\,.
\end{aligned}
$$

Na osnovu oblika infinitezimalne transformacije možemo da ekstrapoliramo konačnu transformaciju.

G-gejdž transformacije

Dž. F. Martins i R. Piken, 2011., V. Vang, 2014.

$\hookrightarrow$ U $3BF$ teoriji za 2-ukršten modul $(L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G, \rhd, \{\_\,,\_\}_{\mathrm{pf}})$, sledeća transformacija je gejdž simetrija,

$$
\begin{aligned}
\alpha &\to \alpha' = \mathrm{Ad}_g \alpha + g \mathrm{d} g^{-1}\,, & B &\to B' = g B g^{-1}\,,\\
\beta &\to \beta' = g \rhd \beta\,, & C &\to C' = g \rhd C\,,\\
\gamma &\to \gamma' = g \rhd \gamma\,, & D &\to D' = g \rhd D\,,
\end{aligned}
$$

gde je $g = \exp(\epsilon_{\mathfrak{g}} \cdot \hat{G}) = \exp({\epsilon_{\mathfrak{g}}}_{\alpha} \hat{G}^{\alpha}) \in G$ i $\epsilon_{\mathfrak{g}} : \mathcal{M}_4 \to \mathfrak{g}$ parametar transformacija.

↪ Dalje, razmatramo infinitezimalnu transformaciju određenu parametrom ${\epsilon_{\mathfrak{h}}}^{a}{}_{i}$.
Primetimo da su varijacije formi varijabli ${\alpha^{\alpha}}_{0}$ i ${\alpha^{\alpha}}_{i}$ koje odgovaraju ovom parametru:

$$\delta_0 {\alpha^{\alpha}}_{o} = 0\,, \qquad \delta_0 {\alpha^{\alpha}}_{i} = -{\partial_a}^{\alpha} {\epsilon_{\mathfrak{h}}}^{a}{}_{i}\,.$$

Kako generator daje transformaciju na jednoj prostornoj hiperpovrši Σ_3, možemo da ekstrapoliramo varijaciju forme koja odgovara prostorvremenskom parametru ${\epsilon_{\mathfrak{h}}}^{a}{}_{\mu}$, odnosno za varijaciju varijable ${\alpha^{\alpha}}_{\mu}$ imamo:

$$\delta_0 {\alpha^{\alpha}}_{\mu} = -{\partial_a}^{\alpha} {\epsilon_{\mathfrak{h}}}^{a}{}_{\mu}\,,$$

Slično se dobija za preostale varijable.

↪ Prostorvremenske transformacije simetrije dobijene su ekstrapolacijom transformacija na hiperpovrši Σ_3, a zatim je eksplicitno pokazano da je $3BF$ dejstvo invarijantno pri ovim transformacijama.

$\hookrightarrow$ Dalje, razmatramo infinitezimalnu transformaciju određenu parametrom ${\epsilon_{\mathfrak{h}}}^a{}_i$.

Primetimo da su varijacije formi varijabli $\alpha^\alpha{}_0$ i $\alpha^\alpha{}_i$ koje odgovaraju ovom parametru:

$$\delta_0 \alpha^\alpha{}_o = 0\,, \qquad \delta_0 \alpha^\alpha{}_i = -\partial_a{}^\alpha {\epsilon_{\mathfrak{h}}}^a{}_i\,.$$

Kako generator daje transformaciju na jednoj prostornoj hiperpovrši Σ_3, možemo da ekstrapoliramo varijaciju forme koja odgovara prostorvremenskom parametru ${\epsilon_{\mathfrak{h}}}^a{}_\mu$, odnosno za varijaciju varijable $\alpha^\alpha{}_\mu$ imamo:

$$\delta_0 \alpha^\alpha{}_\mu = -\partial_a{}^\alpha {\epsilon_{\mathfrak{h}}}^a{}_\mu\,,$$

Slično se dobija za preostale varijable.

H-gejdž transformacija

J. F. Martins and R. Picken, 2011., W. Wang, 2014.

$\hookrightarrow$ U $3BF$ teoriji za 2-ukršteni modul $(L \stackrel{\delta}{\to} H \stackrel{\partial}{\to} G, \triangleright, \{\_\,,\_\}_{\mathrm{pf}})$, sledeća transformacija je simetrija:

$$\begin{array}{lll lll}
\alpha & \to & \alpha' = \alpha - \partial\epsilon_{\mathfrak{h}}\,, & B & \to & B' = B - C' \wedge^{\mathcal{T}} \epsilon_{\mathfrak{h}} - \epsilon_{\mathfrak{h}} \wedge^{\mathcal{D}} \epsilon_{\mathfrak{h}} \wedge^{\mathcal{D}} D\,,\\
\beta & \to & \beta' = \beta - \nabla'\epsilon_{\mathfrak{h}} - \epsilon_{\mathfrak{h}} \wedge \epsilon_{\mathfrak{h}}\,, & C & \to & C' = C - D \wedge^{\mathcal{X}_1} \epsilon_{\mathfrak{h}} - D \wedge^{\mathcal{X}_2} \epsilon_{\mathfrak{h}}\,,\\
\gamma & \to & \gamma' = \gamma + \{\beta', \epsilon_{\mathfrak{h}}\}_{\mathrm{pf}} + \{\epsilon_{\mathfrak{h}}, \beta\}_{\mathrm{pf}}\,, & D & \to & D' = D\,,
\end{array}$$

gde je $\epsilon_{\mathfrak{h}} \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4, \mathfrak{h})$ proizvoljna 1-forma element algebre $\mathfrak{h}$.

↪ Varijacije formi koje odgovaraju parametru $\epsilon_{\mathfrak{l}}{}^{A}{}_{\mu\nu}$:

$$
\begin{aligned}
\delta_0 \alpha^{\alpha}{}_{\mu} &= 0\,, & \delta_0 B^{\alpha}{}_{\mu\nu} &= -D_A \rhd_{\beta B}{}^{A} \epsilon_{\mathfrak{l}}{}^{B}{}_{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\,, \\
\delta_0 \beta^{a}{}_{\mu\nu} &= \delta_A{}^{a} \epsilon_{\mathfrak{l}}{}^{A}{}_{\mu\nu}\,, & \delta_0 C^{a}{}_{\mu} &= 0\,, \\
\delta_0 \gamma^{A}{}_{\mu\nu\rho} &= \nabla_\mu \epsilon_{\mathfrak{l}}{}^{A}{}_{\nu\rho} - \nabla_\nu \epsilon_{\mathfrak{l}}{}^{A}{}_{\mu\rho} + \nabla_\rho \epsilon_{\mathfrak{l}}{}^{A}{}_{\mu\nu}\,, & \delta_0 D^{A} &= 0\,.
\end{aligned}
$$

L-gejdž transformacije

J. F. Martins and R. Picken, 2011., W. Wang, 2014.

↪ U $3BF$ teoriji za 2-ukršteni modul $(L \overset{\delta}{\to} H \overset{\partial}{\to} G, \rhd, \{\_\,,\_\}_{\mathrm{pf}})$, sledeća transformacija je simetrija

$$
\begin{aligned}
\alpha &\to \alpha' = \alpha\,, & B &\to B' = B + D \wedge^{\mathcal{S}} \epsilon_{\mathfrak{l}}\,, \\
\beta &\to \beta' = \beta + \delta\epsilon_{\mathfrak{l}}\,, & C &\to C' = C\,, \\
\gamma &\to \gamma' = \gamma + \nabla\epsilon_{\mathfrak{l}}\,, & D &\to D' = D\,,
\end{aligned}
$$

gde je $\epsilon_{\mathfrak{l}} \in \mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4, \mathfrak{l})$ proizvoljna 2-forma element algebre $\mathfrak{l}$.

↪ Ekstrapolirane varijacije formi na celom prostorvremenu koje odgovaraju parametru ${\epsilon_{\mathfrak{m}}}^{\alpha}{}_{\mu}$.

$$
\begin{array}{rclrcl}
\delta_0 \alpha^{\alpha}{}_{\mu} & = & 0\,, & \delta_0 B^{\alpha}{}_{\mu\nu} & = & -2\nabla_{[\mu|}{\epsilon_{\mathfrak{m}}}^{\alpha}{}_{|\nu]}\,, \\
\delta_0 \beta^{a}{}_{\mu\nu} & = & 0\,, & \delta_0 C^{a}{}_{\mu} & = & -\partial^{a}{}_{\alpha}{\epsilon_{\mathfrak{m}}}^{\alpha}{}_{\mu}\,, \\
\delta_0 \gamma^{A}{}_{\mu\nu\rho} & = & 0\,, & \delta_0 D^{A} & = & 0\,.
\end{array}
$$

Na osnovu ovih infinitezimalnih transformacija, mogu se pogoditi konačne transformacije.

M-gejdž transformacije

↪ U $3BF$ teoriji za 2-ukršten modul $(L \overset{\delta}{\to} H \overset{\partial}{\to} G, \triangleright, \{\_\,,\_\}_{\mathrm{pf}})$, sledeća transformacija je simetrija

$$
\begin{array}{rclrcl}
\alpha & \to & \alpha' = \alpha\,, & B & \to & B' = B - \nabla\epsilon_{\mathfrak{m}}\,, \\
\beta & \to & \beta' = \beta\,, & C^{a} & \to & C'^{a} = C^{a} - \partial^{a}{}_{\alpha}{\epsilon_{\mathfrak{m}}}^{\alpha}\,, \\
\gamma & \to & \gamma' = \gamma\,, & D & \to & D' = D\,,
\end{array}
$$

gde je $\epsilon_{\mathfrak{m}} \in \mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4, \mathfrak{g})$ proizvoljna 1-forma element algebre $\mathfrak{g}$.

$\hookrightarrow$ Infinitezimalne transformacije koje odgovaraju parametru $\epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a}$, date su varijacijama formi:

$$
\begin{aligned}
\delta_0 \alpha^{\alpha}{}_{\mu} &= 0\,, & \delta_0 B^{\alpha}{}_{\mu\nu} &= \beta_{b\mu\nu} \rhd_{\alpha' a}{}^{b} \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a} g^{\alpha\alpha'}\,, \\
\delta_0 \beta^{a}{}_{\mu\nu} &= 0\,, & \delta_0 C^{a}{}_{\mu} &= -\nabla_{\mu} \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a}\,, \\
\delta_0 \gamma^{A}{}_{\mu\nu\rho} &= 0\,, & \delta_0 D^{A} &= \delta^{A}{}_{a} \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a}\,.
\end{aligned}
$$

N-gejdž transformacije

$\hookrightarrow$ U $3BF$ teoriji za 2-ukršteni modul $(L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G, \rhd, \{\_\,,\_\}_{\mathrm{pf}})$, sledeća transformacija je simetrija

$$
\begin{aligned}
\alpha &\to \alpha' = \alpha\,, & B &\to B' = B - \beta \wedge^{\mathcal{T}} \epsilon_{\mathfrak{n}}\,, \\
\beta &\to \beta' = \beta\,, & C &\to C' = C - \nabla \epsilon_{\mathfrak{n}}\,, \\
\gamma &\to \gamma' = \gamma\,, & D^{A} &\to D'^{A} = D^{A} + \delta^{A}{}_{a} \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a}\,,
\end{aligned}
$$

gde je $\epsilon_{\mathfrak{n}} : \mathcal{M}_4 \to \mathfrak{h}$ proizvoljna funkcija element algebre $\mathfrak{h}$.

Struktura gejdž grupe simetrija

↪ Posmatrajmo dve infinitezimalne G-gejdž transformacije, određene infinitezimalnim parametrima ${\epsilon_\mathfrak{g}}^\alpha{}_1$ i ${\epsilon_\mathfrak{g}}^\beta{}_2$. Za izračunavanje komutatora između generatora G-gejdž transformacija koristićemo *Baker-Kampbel-Hausdorf (BCH) formulu* u slučaju kada su parametri transformacija mali

$$e^{{\epsilon_\mathfrak{g}}^\alpha{}_1\hat{G}_\alpha} e^{{\epsilon_\mathfrak{g}}^\beta{}_2\hat{G}_\beta} = e^{{\epsilon_\mathfrak{g}}^\alpha{}_1\hat{G}_\alpha + {\epsilon_\mathfrak{g}}^\beta{}_2\hat{G}_\beta + \frac{1}{2}{\epsilon_\mathfrak{g}}^\alpha{}_1 {\epsilon_\mathfrak{g}}^\beta{}_2 [\hat{G}_\alpha, \hat{G}_\beta] + O({\epsilon_\mathfrak{g}}^3)}\,,$$

iz čega sledi:

$$e^{{\epsilon_\mathfrak{g}}^\alpha{}_1\hat{G}_\alpha} e^{{\epsilon_\mathfrak{g}}^\beta{}_2\hat{G}_\beta} - e^{{\epsilon_\mathfrak{g}}^\beta{}_2\hat{G}_\beta} e^{{\epsilon_\mathfrak{g}}^\alpha{}_1\hat{G}_\alpha} = {\epsilon_\mathfrak{g}}^\alpha{}_1 {\epsilon_\mathfrak{g}}^\beta{}_2 [\hat{G}_\alpha, \hat{G}_\beta] + O({\epsilon_\mathfrak{g}}^3)\,.$$

↪ Dobijamo da algebra $\mathfrak{g}$ grupe G 2-ukrštenog modula $(L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G\,, \triangleright\,, \{\_\,,\_\}_{\mathrm{pf}})$:

$$\boxed{[\hat{G}_\alpha, \hat{G}_\beta] \quad = \quad f_{\alpha\beta}{}^\gamma \hat{G}_\gamma\,.}$$

↪ Algebra grupe $\tilde{H}_L$ (generatori H- i L-gejdž transformacija):

$$[\hat{H}_a{}^\mu, \hat{H}_b{}^\nu] = 2X_{(ab)}{}^A \hat{L}_A{}^{\mu\nu}\,, \qquad [\hat{L}_A{}^{\mu\nu}, \hat{L}_B{}^{\rho\sigma}] = 0\,, \qquad [\hat{H}_a{}^\mu, \hat{L}_A{}^{\nu\rho}] = 0\,.$$

↪ Grupe $\tilde{M}$ i $\tilde{N}$ (generatori M-gejdž transformacija i N-gejdž transformacija)

$$[\hat{M}_\alpha{}^\mu, \hat{M}_\beta{}^\nu] = 0\,, \quad [\hat{N}_a, \hat{N}_b] = 0\,, \quad [\hat{M}_\alpha{}^\mu, \hat{N}_a] = 0\,.$$

↪ Dejstvo generatora grupe $\tilde{H}_L$ na generatore M- i N-gejdž transformacija:

$$\begin{aligned} [\hat{H}_a{}^\mu, \hat{N}^b] &= \triangleright_{\alpha a}{}^b \hat{M}^{\alpha\mu}\,, & [\hat{H}_a{}^\mu, \hat{M}_\alpha{}^\nu] &= 0\,, \\ [\hat{L}_A{}^{\nu\rho}, \hat{M}_\alpha{}^\mu] &= 0\,, & [\hat{L}_A{}^{\mu\nu}, \hat{N}_a] &= 0\,. \end{aligned}$$

↪ Dejstvo generatora grupe G na generatore H-, L-, M- i N-gejdž transformacije:

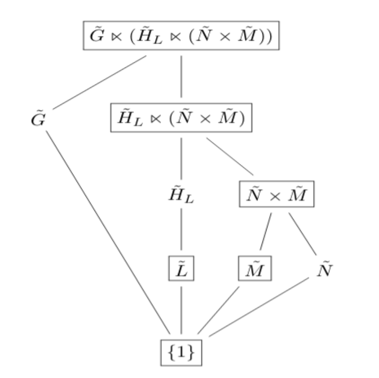
$$\begin{aligned} [\hat{G}_\alpha, \hat{H}_a{}^\mu] &= \triangleright_{\alpha a}{}^b \hat{H}_b{}^\mu\,, & [\hat{G}_\alpha, \hat{L}_A{}^{\mu\nu}] &= \triangleright_{\alpha A}{}^B \hat{L}_B{}^{\mu\nu}\,, \\ [\hat{G}_\alpha, \hat{M}_\beta{}^\mu] &= f_{\alpha\beta}{}^\gamma \hat{M}_\gamma{}^\mu\,, & [\hat{G}_\alpha, \hat{N}_a] &= \triangleright_{\alpha a}{}^b \hat{N}_b\,. \end{aligned}$$

Grupa gejdž simetrija

$\hookrightarrow$ Sumiranjem prethodnih reultata dobijamo da grupa gejdž simetrija $\mathcal{G}_{3BF}$ ima strukturu:

$$\mathcal{G}_{3BF} = \tilde{G} \ltimes \left(\tilde{H}_L \ltimes \left(\tilde{N} \times \tilde{M} \right) \right) .$$

TR i M. Vojinović, arXiv: 2101.04049.



$\hookrightarrow$ Svako dejstvo koje zavisi od bar dva polja $\phi_1(x)$ i $\phi_2(x)$ je invarijantno pri sledećoj transformaciji, određenoj HT parametrom ϵ^{HT}:

$$\delta_0{}^{\mathrm{HT}}\phi_1 = \epsilon^{\mathrm{HT}}(x)\frac{\delta S}{\delta\phi_2}\,, \qquad \delta_0{}^{\mathrm{HT}}\phi_2 = -\epsilon^{\mathrm{HT}}(x)\frac{\delta S}{\delta\phi_1}\,,$$

što se jednostavno proverava izračunavanjem varijacije dejstva:

$$\delta^{\mathrm{HT}}S[\phi_1,\phi_2] = \frac{\delta S}{\delta\phi_1}\delta_0{}^{\mathrm{HT}}\phi_1 + \frac{\delta S}{\delta\phi_2}\delta_0{}^{\mathrm{HT}}\phi_2 = 0\,.$$

$\hookrightarrow$ **Ako su difeomorfizmi simetrija dejstva**, onda za svako polje $\phi(x)$ u teoriji, i svaki parametar difeomorfizama $\xi^\mu(x)$, **postoji izbor parametara** $\epsilon_i(x)$ i $\epsilon^{\mathrm{HT}}(x)$, tako da važi:

$$(\delta_0{}^{\mathrm{gauge}} + \delta_0{}^{\mathrm{HT}} + \delta_0{}^{\mathrm{diff}})\,\phi = 0\,.$$

Ako su difeomorfizmi simetrija teorije, njihova varijacija forme može biti izražena preko varijacija forme koje odgovaraju gejdž i HT transformacijama:

$$\delta_0{}^{\mathrm{diff}}\,\phi = -\delta_0{}^{\mathrm{gauge}}\phi - \delta_0{}^{\mathrm{HT}}\phi\,.$$

"Kvantizacija gejdž sistema", Eno i Taitelboim, 1994.

↪ U našem slučaju, $3BF$ dejstvo zavisi od polja $\alpha^{\alpha}{}_{\mu}$, $\beta^{a}{}_{\mu\nu}$, $\gamma^{A}{}_{\mu\nu\rho}$, $B^{\alpha}{}_{\mu\nu}$, $C^{a}{}_{\mu}$ i D^{A}.

↪ Parametri HT transformacija su $\epsilon^{\mathrm{HT}\,\alpha\beta}{}_{\mu\nu\rho}$, $\epsilon^{\mathrm{HT}\,ab}{}_{\mu\nu\rho}$ i $\epsilon^{\mathrm{HT}\,AB}{}_{\mu\nu\rho}$.

↪ HT varijacije formi definisane su kao:

$$
\begin{aligned}
\delta_0{}^{\mathrm{HT}}\alpha^{\alpha}{}_{\mu} &= \frac{1}{2}\epsilon^{\mathrm{HT}\,\alpha\beta}{}_{\mu\nu\rho}\frac{\delta S}{\delta B^{\beta}{}_{\nu\rho}}\,, & \delta_0{}^{\mathrm{HT}}B^{\alpha}{}_{\mu\nu} &= -\epsilon^{\mathrm{HT}\,\alpha\beta}{}_{\rho\mu\nu}\frac{\delta S}{\delta \alpha^{\beta}{}_{\rho}}\,,\\
\delta_0{}^{\mathrm{HT}}\beta^{a}{}_{\mu\nu} &= \epsilon^{\mathrm{HT}\,ab}{}_{\mu\nu\rho}\frac{\delta S}{\delta C^{b}{}_{\rho}}\,, & \delta_0{}^{\mathrm{HT}}C^{a}{}_{\mu} &= -\frac{1}{2}\epsilon^{\mathrm{HT}\,ab}{}_{\nu\rho\mu}\frac{\delta S}{\delta \beta^{b}{}_{\nu\rho}}\,,\\
\delta_0{}^{\mathrm{HT}}\gamma^{A}{}_{\mu\nu\rho} &= \epsilon^{\mathrm{HT}\,AB}{}_{\mu\nu\rho}\frac{\delta S}{\delta D^{B}}\,, & \delta_0{}^{\mathrm{HT}}D^{A} &= -\frac{1}{3!}\epsilon^{\mathrm{HT}\,AB}{}_{\mu\nu\rho}\frac{\delta S}{\delta \gamma^{B}{}_{\mu\nu\rho}}\,,
\end{aligned}
$$

↪ Parametri gejdž transformacija su $\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^{\alpha}$, $\epsilon_{\mathfrak{h}}{}^{a}{}_{\mu}$, $\epsilon_{\mathfrak{l}}{}^{A}{}_{\mu\nu}$, $\epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_{\mu}$ i $\epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a}$.

Postoji izbor koji daje difeomorfizme!

↪ Ako gejdž parametre prepišemo kao

$$\epsilon_{\mathfrak{g}}{}^{\alpha} = -\xi^{\lambda}\alpha^{\alpha}{}_{\lambda}\,,\quad \epsilon_{\mathfrak{h}}{}^{a}{}_{\mu} = \xi^{\lambda}\beta^{a}{}_{\mu\lambda}\,,\quad \epsilon_{\mathfrak{l}}{}^{A}{}_{\mu\nu} = \xi^{\lambda}\gamma^{A}{}_{\mu\nu\lambda}\,,\quad \epsilon_{\mathfrak{m}}{}^{\alpha}{}_{\mu} = \xi^{\lambda}B^{\alpha}{}_{\mu\lambda}\,,\quad \epsilon_{\mathfrak{n}}{}^{a} = -\xi^{\lambda}C^{a}{}_{\lambda}\,,$$

a HT parametre kao

$$\epsilon^{\mathrm{HT}\,\alpha\beta}{}_{\mu\nu\rho} = \xi^{\lambda}g^{\alpha\beta}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\,,\qquad \epsilon^{\mathrm{HT}\,ab}{}_{\mu\nu\rho} = \xi^{\lambda}g^{ab}\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}\,,\qquad \epsilon^{\mathrm{HT}\,AB}{}_{\mu\nu\rho} = \xi^{\lambda}g^{AB}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}\,,$$

dobijamo standardne varijacije forme difeomorfizama.

↪ Na ovaj način dobijene su varijacije forme difeomorfizama:

$$
\begin{array}{lcr}
\delta_0{}^{\text{diff}} \alpha^{\alpha}{}_{\mu} & = & -\partial_\mu \xi^\lambda \alpha^{\alpha}{}_{\lambda} - \xi^\lambda \partial_\lambda \alpha^{\alpha}{}_{\mu} \,, \\
\delta_0{}^{\text{diff}} \beta^{a}{}_{\mu\nu} & = & -\partial_\mu \xi^\lambda \beta^{a}{}_{\lambda\nu} - \partial_\nu \xi^\lambda \beta^{a}{}_{\mu\lambda} - \xi^\lambda \partial_\lambda \beta^{a}{}_{\mu\nu} \,, \\
\delta_0{}^{\text{diff}} \gamma^{A}{}_{\mu\nu\rho} & = & -\partial_\mu \xi^\lambda \gamma^{A}{}_{\lambda\nu\rho} - \partial_\nu \xi^\lambda \gamma^{A}{}_{\mu\lambda\rho} - \partial_\rho \xi^\lambda \gamma^{A}{}_{\mu\nu\lambda} - \xi^\lambda \partial_\lambda \gamma^{A}{}_{\mu\nu\rho} \,, \\
\delta_0{}^{\text{diff}} B^{\alpha}{}_{\mu\nu} & = & -\partial_\mu \xi^\lambda B^{\alpha}{}_{\lambda\nu} - \partial_\nu \xi^\lambda B^{\alpha}{}_{\mu\lambda} - \xi^\lambda \partial_\lambda B^{\alpha}{}_{\mu\nu} \,, \\
\delta_0{}^{\text{diff}} C^{a}{}_{\mu} & = & -\partial_\mu \xi^\lambda C^{a}{}_{\lambda} - \xi^\lambda \partial_\lambda C^{a}{}_{\mu} \,, \\
\delta_0{}^{\text{diff}} D^{A} & = & -\xi^\lambda \partial_\lambda D^{A} \,.
\end{array}
$$

↪ Dakle, $3BF$ teorija je invarijantna na difeomorfizam transformacije.

↪ Ali, difeomorfizmi ne mogu biti dobijeni kao podgrupa ukupne gejdž grupe simetrija $\mathcal{G}_{3BF}$, već kao podgrupa semidirektnog proizvoda ukupne gejdž grupe simetrija $\mathcal{G}_{3BF}$ i grupe HT transformacija $\mathcal{G}_{HT}$.

$$
Diff(\mathcal{M}_4) \not\subset \mathcal{G}_{3BF} \,, \quad \text{već} \quad Diff(\mathcal{M}_4) \subset \mathcal{G}_{total} = \mathcal{G}_{3BF} \ltimes \mathcal{G}_{HT} \,.
$$

TR i M. Vojinović, arXiv: 2101.04049.

- Nakon Hamiltonove analize teorije, računanja generatora Kastelanijevom procedurom i računanja njihovih komutatora dobijeno je da je $3BF$ teorija invarijantna na **pet vrsta gejdž transformacija** — **G-gejdž, H-gejdž, L-gejdž, M-gejdž i N-gejdž transformacije**.
- Analizirali smo strukturu kompletne gejdž grupe simetrija $\mathcal{G}_{3BF}$ – dobijena je **veza između grupe gejdž simetrije** $3BF$ **dejstva i strukture** 3**-grupe** na kojoj je zasnovano $3BF$ dejstvo.
- Dobijeno je da $3BF$ teorija ima **difeomorfizam simetriju**.
- Ova analiza je važan korak ka proučavanju gejdž grupe simetrije teorije gravitacije sa materijom, formulisane kao $3BF$ dejstvo sa vezama, kao i njene **kanonske kvantizacije**.

TR i M. Vojinović, arXiv: 2101.04049.

FORMIRANJE $3BF$ SUME PO STANJIMA

↪ Klasične jednačine kretanja nameću uslov da je gejdž koneksija ravna – da **svaka nul-homotopna kriva odgovara identitetu gejdž grupe**.

↪ U okviru viših gejdž teorija, ovaj uslov se generalizuje zahtevom da **površinska holonomija granične 2-sfere svake 3-lopte bude trivijalna**.

↪ U okviru 3-gejdž teorije prvi uslov ostaje nepromenjen, drugi uslov se uopštava, dok im je potrebno dodati i **uslov ravnosti granične zapremine 4-simpleksa**.

Lema 1 Žireli, Pfajfer i Popesku arXiv: 0708.3051.

Posmatramo trougao $(jk\ell)$. Ivice (jk) su označene grupnim elementima $g_{jk} \in G$ i trouglovi $(jk\ell)$ elementima $h_{jk\ell} \in H$.

$$
\begin{tikzcd}
l & k \arrow[l, bend right, "g_{kl}"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow h_{jkl}"] & j \arrow[l, bend right, "g_{jk}"'] \arrow[ll, bend left=70, "g_{jl}"] \\
 & {} &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
l & l \arrow[l, bend right, "1"'] \arrow[l, bend left, "\partial(h_{jkl})"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow h_{jkl}"]
\end{tikzcd}
\begin{tikzcd}
l & k \arrow[l, bend right, "g_{kl}"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow 1_{g_{kl}g_{jk}}"] & j \arrow[l, bend right, "g_{jk}"'] \arrow[ll, bend left=70, "g_{kl}g_{jk}"] \\
 & {} &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
l & k \arrow[l, bend right, "g_{kl}"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow h_{jkl}"] & j \arrow[l, bend right, "g_{jk}"'] \arrow[ll, bend left=70, "\partial(h_{jkl})\,g_{kl}g_{jk}"] \\
 & {} &
\end{tikzcd}
.
$$

Krivina $\gamma_1 = g_{k\ell}g_{jk}$ je izvor, a krivina $\gamma_2 = g_{j\ell}$ je meta površinskog 2-morfizma $\Sigma : \gamma_1 \to \gamma_2$, označenog grupnim elementom $h_{jk\ell}$,

$$
g_{j\ell} = \partial(h_{jk\ell})g_{k\ell}g_{jk} \,.
$$

Lema 2 TR i M. Vojinović, arXiv: 2201.02572.

Posmatramo tetraedar $(jk\ell m)$. Tetraedri $(jk\ell m)$ su označeni grupnim elementima $l_{jk\ell m} \in L$.

$$
\begin{tikzcd}
m & \ell \arrow[l, "g_{\ell m}"'] & k \arrow[l, bend right, "g_{k\ell}"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow h_{jk\ell}"] & j \arrow[l, bend right, "g_{jk}"'] \arrow[ll, bend left=50, "g_{j\ell}"] \arrow[lll, bend left=70, "g_{jm}"] \\
 & \arrow[u, phantom, "\Downarrow h_{j\ell m}"] & {} &
\end{tikzcd}
= (g_{\ell m} g_{j\ell}, h_{j\ell m}) \#_2 \big(g_{\ell m} \#_1 (g_{k\ell} g_{jk}, h_{jk\ell})\big) = \big(g_{\ell m} g_{k\ell} g_{jk}, h_{j\ell m}(g_{\ell m} \triangleright h_{jk\ell})\big) \,.
$$

$$
\begin{tikzcd}
m & \ell \arrow[l, bend right, "g_{\ell m}"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow h_{k\ell m}"] & k \arrow[l, bend right, "g_{k\ell}"'] \arrow[ll, bend left=50, "g_{km}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow h_{jkm}"] & j \arrow[l, "g_{jk}"'] \arrow[lll, bend left=70, "g_{jm}"] \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd}
= (g_{km} g_{jk}, h_{jkm}) \#_2 \big((g_{\ell m} g_{k\ell}, h_{k\ell m}) \#_1 g_{jk}\big) = (g_{\ell m} g_{k\ell} g_{jk}, h_{jkm} h_{k\ell m}) \,.
$$

Mapiranje površine $\Sigma_1 : g_{\ell m} g_{k\ell} g_{jk} \to g_{jm}$ u površinu $\Sigma_2 : g_{\ell m} g_{k\ell} g_{jk} \to g_{jm}$ određeno je elementom $l_{jk\ell m}$:

$$
h_{jkm} h_{k\ell m} = \delta(l_{jk\ell m}) h_{j\ell m} (g_{\ell m} \triangleright h_{jk\ell}) \,.
$$

Lema 3 TR i M. Vojinović, arXiv: 2201.02572.

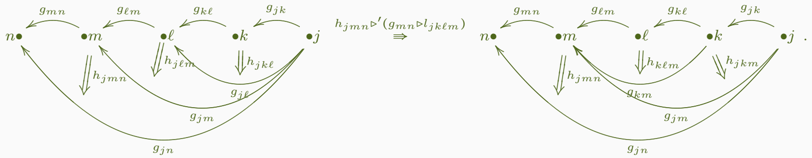
Posmatramo 4-simplex, $(jk\ell mn)$. Graničnu zapreminu 4-simpleksa isekli smo duž površine $h_{jmn}g_{mn} \triangleright (h_{j\ell m}g_{\ell m} \triangleright h_{jk\ell})$.

Korak 1.

3-morfizmom

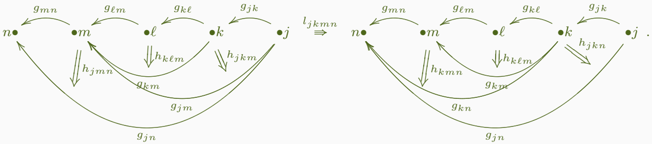
$$\boxed{(g_{mn}g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk}, h_{jmn}g_{mn} \triangleright (h_{j\ell m}g_{\ell m} \triangleright h_{jk\ell}), h_{jmn} \triangleright' (g_{mn} \triangleright l_{jk\ell m}))}$$

mapiramo $\Sigma_1 = h_{jmn}g_{mn} \triangleright (h_{j\ell m}g_{\ell m} \triangleright h_{jk\ell}) \quad \rightarrow \quad \Sigma_2 = h_{jmn}g_{mn} \triangleright (h_{jkm}h_{k\ell m})$.



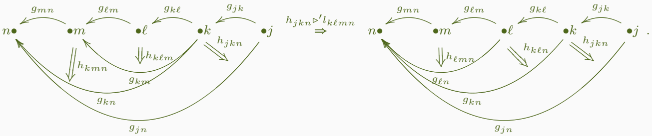
Korak 2. 3-morfizmom $\boxed{(g_{mn}g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk}, h_{jmn}g_{mn} \triangleright (h_{jkm}h_{k\ell m}), l_{jkmn})}$

mapiramo $\Sigma_1 = h_{jmn}g_{mn} \triangleright (h_{jkm}h_{k\ell m}) \quad \rightarrow \quad \Sigma_2 = h_{jkn}h_{kmn}g_{mn} \triangleright h_{k\ell m}$.



Korak 3. 3-morfizmom $\boxed{(g_{mn}g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk}, h_{jkn}h_{kmn}g_{mn} \triangleright h_{k\ell m}, h_{jkn} \triangleright' l_{k\ell mn})}$

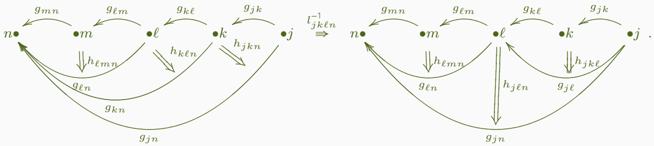
mapiramo $\Sigma_1 = h_{jkn}h_{kmn}g_{mn} \triangleright h_{k\ell m} \quad \rightarrow \quad \Sigma_2 = h_{jkn}h_{k\ell n}h_{\ell mn}$.



3-GEJDŽ TEORIJA NA TRIANGULACIJI

Korak 4. 3-morfizmom $\boxed{(g_{mn}g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk}, h_{jkn}h_{k\ell n}h_{\ell mn}, l^{-1}_{jk\ell n})}$

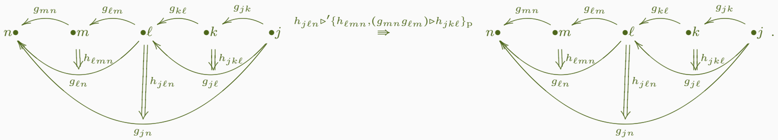
mapiramo $\Sigma_1 = h_{jkn}h_{k\ell n}h_{\ell mn} \quad \to \quad \Sigma_2 = h_{j\ell n}g_{\ell n} \triangleright h_{jk\ell}h_{\ell mn}$.



Korak 5. 3-morfizmom

$$\boxed{(g_{mn}g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk}, h_{j\ell n}g_{\ell n} \triangleright h_{jk\ell}h_{\ell mn}, h_{j\ell n} \triangleright' \{h_{\ell mn}, (g_{mn}g_{\ell m}) \triangleright h_{jk\ell}\}_{\mathrm{p}})}$$

mapiramo $\Sigma_1 = h_{j\ell n}g_{\ell n} \triangleright h_{jk\ell}h_{\ell mn} \quad \to \quad \Sigma_2 = h_{j\ell n}h_{\ell mn}(g_{mn}g_{\ell m}) \triangleright h_{jk\ell}$.



Korak 6. Najzad, konstrišemo 3-morfizam

$$\boxed{\left(g_{mn}g_{\ell m}g_{k\ell}g_{jk},\, h_{j\ell n}h_{\ell mn}(g_{mn}g_{\ell m}) \triangleright h_{jk\ell},\, l^{-1}_{j\ell mn}\right)}$$

koji mapira $\Sigma_1 = h_{j\ell n}h_{\ell mn}(g_{mn}g_{\ell m}) \triangleright h_{jk\ell} \quad \rightarrow \quad \boxed{h_{jmn}g_{mn} \triangleright (h_{j\ell m}g_{\ell m} \triangleright h_{jk\ell}).}$

$$\begin{tikzcd}
n & m \arrow[l, bend right, "g_{mn}"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow h_{\ell mn}"] & \ell \arrow[l, bend right, "g_{\ell m}"'] \arrow[ll, bend left=60, "g_{\ell n}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow h_{j\ell n}"] & k \arrow[l, bend right, "g_{k\ell}"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow h_{jk\ell}"] & j \arrow[l, bend right, "g_{jk}"'] \arrow[ll, bend left=60, "g_{j\ell}"] \arrow[llll, bend left=80, "g_{jn}"] \\
& {} & {} & {} &
\end{tikzcd}
\overset{l^{-1}_{j\ell mn}}{\Rrightarrow}
\begin{tikzcd}
n & m \arrow[l, bend right, "g_{mn}"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow h_{jmn}"] & \ell \arrow[l, bend right, "g_{\ell m}"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow h_{j\ell m}"] & k \arrow[l, bend right, "g_{k\ell}"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow h_{jk\ell}"] & j \arrow[l, bend right, "g_{jk}"'] \arrow[ll, bend left=60, "g_{j\ell}"] \arrow[lll, bend left=70, "g_{jm}"] \arrow[llll, bend left=80, "g_{jn}"] \\
& {} & {} & {} &
\end{tikzcd} .$$

<u>Ovim se vraćamo na polaznu površinu!</u>

Dobijeni 3-morfizam je jedinični 3-morfizam sa izvorom i metom $\Sigma_1 = \Sigma_2 = h_{jmn}g_{mn} \triangleright (h_{j\ell m}g_{\ell m} \triangleright h_{jk\ell})$,

$$\boxed{l^{-1}_{j\ell mn}\, h_{j\ell n} \triangleright' \{h_{\ell mn}, (g_{mn}g_{\ell m}) \triangleright h_{jk\ell}\}_{\mathrm{p}}\, l^{-1}_{jk\ell n}(h_{jkn} \triangleright' l_{k\ell mn})l_{jkmn}h_{jmn} \triangleright' (g_{mn} \triangleright l_{jk\ell m}) = e\,.}$$

Konstrukcija topološke $3BF$ *sume po stanjima* na osnovu S_{3BF} dejstva uobičajenom *kvantizacionom procedurom spinske pene*.

$$Z=\int \mathcal{D}\alpha\,\mathcal{D}\beta\,\mathcal{D}\gamma\,\mathcal{D}B\,\mathcal{D}C\,\mathcal{D}D\exp\left(i\int_{M_4}\langle B\wedge\mathcal{F}\rangle_{\mathfrak{g}}+\langle C\wedge\mathcal{G}\rangle_{\mathfrak{h}}+\langle D\wedge\mathcal{H}\rangle_{\mathfrak{l}}\right).$$

↪Formalnom integracijom po Lagranževim množiteljima B, C i D dobijamo:

$$Z=\mathcal{N}\int \mathcal{D}\alpha\,\mathcal{D}\beta\,\mathcal{D}\gamma\;\delta(\mathcal{F})\delta(\mathcal{G})\delta(\mathcal{H}).$$

↪ Diskretizacija 3-koneksije:

- $\alpha\in\mathcal{A}^1(\mathcal{M}_4,\mathfrak{g})\mapsto g_\epsilon\in G$ boji ivice $\epsilon=(jk)\in\Lambda_1$,
- $\beta\in\mathcal{A}^2(\mathcal{M}_4,\mathfrak{h})\mapsto h_\Delta\in H$ boji trouglove $\Delta=(jk\ell)\in\Lambda_2$,
- $\gamma\in\mathcal{A}^3(\mathcal{M}_4,\mathfrak{l})\mapsto l_\tau\in L$ boji tetraedre $\tau=(jk\ell m)\in\Lambda_3$.

$$\left.\begin{aligned}\int\mathcal{D}\alpha &\quad\mapsto\quad \prod_{(jk)\in\Lambda_1}\int_G dg_{jk}\\ \int\mathcal{D}\beta &\quad\mapsto\quad \prod_{(jk\ell)\in\Lambda_2}\int_H dh_{jk\ell}\\ \int\mathcal{D}\gamma &\quad\mapsto\quad \prod_{(jk\ell m)\in\Lambda_3}\int_L dl_{jk\ell m}\end{aligned}\right\}\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \text{Diskretizacija mere integrala.}$$

↪ Uslov $\delta(\mathcal{F})$ je diskretizovan kao

$$\delta(\mathcal{F}) = \prod_{(jk\ell)\in\Lambda_2} \delta_G(g_{jk\ell})\,, \qquad \boxed{\delta_G(g_{jk\ell}) = \delta_G\big(\partial(h_{jk\ell})\, g_{k\ell}\, g_{jk}\, g_{j\ell}^{-1}\big)\,.}$$

↪ Uslov $\delta(\mathcal{G})$ je diskretizovan kao

$$\delta(\mathcal{G}) = \prod_{(jk\ell m)\in\Lambda_3} \delta_H(h_{jk\ell m})\,,$$

$$\boxed{\delta_H(h_{jk\ell m}) = \delta_H\big(\delta(l_{jk\ell m})h_{j\ell m}\,(g_{\ell m} \triangleright h_{jk\ell})\, h_{k\ell m}^{-1}\, h_{jkm}^{-1}\big)\,.}$$

↪ Uslov $\delta(\mathcal{H})$ je diskretizovan kao

$$\delta(\mathcal{H}) = \prod_{(jk\ell mn)\in\Lambda_4} \delta_L(l_{jk\ell mn})\,,$$

$$\boxed{\delta_L(l_{jk\ell mn}) = \delta_L\big(l_{j\ell mn}^{-1}\, h_{j\ell n} \triangleright' \{h_{\ell mn}, (g_{mn}g_{\ell m}) \triangleright h_{jk\ell}\}_{\mathrm{p}}\, l_{jk\ell n}^{-1}(h_{jkn} \triangleright' l_{k\ell mn})l_{jkmn}h_{jmn} \triangleright' (g_{mn} \triangleright l_{jk\ell m})\big)\,.}$$

...dobijamo $\Longrightarrow$

$$\boxed{Z = \mathcal{N} \prod_{(jk)\in\Lambda_1} \int_G dg_{jk} \prod_{(jk\ell)\in\Lambda_2} \int_H dh_{jk\ell} \prod_{(jk\ell m)\in\Lambda_3} \int_L dl_{jk\ell m} \Big(\prod_{(jk\ell)\in\Lambda_2} \delta_G(g_{jk\ell})\Big)\Big(\prod_{(jk\ell m)\in\Lambda_3} \delta_H(h_{jk\ell m})\Big)\Big(\prod_{(jk\ell mn)\in\Lambda_4} \delta_L(l_{jk\ell mn})\Big).}$$

Ovaj izraz postaje nezavisan od triangulacije mnogostrukosti pogodnim izborom faktora $\mathcal{N}$.

Neka je $\mathcal{M}_d$ kompaktna orijentisana kombinatorna d-mnogostrukost, $d = 4$, i neka je $(L \overset{\delta}{\to} H \overset{\partial}{\to} G\,, \triangleright\,, \{\_\,,\_\}_{\mathrm{pf}})$ jedan 2-ukršteni modul. Suma po stanjima topološke 3-gejdž teorije je definisana sledećim izrazom:

$$
\begin{aligned}
Z \;=\; & |G|^{-|\Lambda_0|+|\Lambda_1|-|\Lambda_2|}|H|^{|\Lambda_0|-|\Lambda_1|+|\Lambda_2|-|\Lambda_3|}\,|L|^{-|\Lambda_0|+|\Lambda_1|-|\Lambda_2|+|\Lambda_3|-|\Lambda_4|} \\
& \times\left(\prod_{(jk)\in\Lambda_1}\int_G dg_{jk}\right)\left(\prod_{(jk\ell)\in\Lambda_2}\int_H dh_{jk\ell}\right)\left(\prod_{(jk\ell m)\in\Lambda_3}\int_L dl_{jk\ell m}\right) \\
& \times\left(\prod_{(jk\ell)\in\Lambda_2}\delta_G\big(\partial(h_{jk\ell})\,g_{k\ell}\,g_{jk}\,g_{j\ell}^{-1}\big)\right)\left(\prod_{(jk\ell m)\in\Lambda_3}\delta_H\big(\delta(l_{jk\ell m})h_{j\ell m}\,(g_{\ell m}\triangleright h_{jk\ell})\,h_{k\ell m}^{-1}\,h_{jkm}^{-1}\big)\right) \\
& \times\left(\prod_{(jk\ell mn)\in\Lambda_4}\delta_L\big(l_{j\ell mn}^{-1}\,h_{j\ell n}\triangleright'\{h_{\ell mn},(g_{mn}g_{\ell m})\triangleright h_{jk\ell}\}_{\mathrm{p}}\,l_{jk\ell n}^{-1}(h_{jkn}\triangleright' l_{k\ell mn})l_{jkmn}h_{jmn}\triangleright'(g_{mn}\triangleright l_{jk\ell m})\big)\right).
\end{aligned}
$$

Gde $|\Lambda_0|$ označava broj verteksa, $|\Lambda_1|$ broj ivica, $|\Lambda_2|$ trouglova, $|\Lambda_3|$ tetraedara i $|\Lambda_4|$ broj 4-simpleksa triangulacije.

↪ *TR i M. Vojinović,* arXiv: 2201.02572.

↪ Analizirano je ponašanje pri Pahnerovim potezima. - Pahnerovi potezi su lokalne promene triangulacije koje čuvaju topologiju, tako da su bilo koje dve triangulacije iste mnogostrukosti povezane konačnim brojem Pahnerovih poteza.

$2BF$ suma po stanjima

- Konstruišemo $2BF$ dejstvo za opštu striktnu 2-grupu i bilo koju triangulaciju bilo koje glatke d-dimenzionalne prostorvremenske mnogostrukosti, $d \in \{3, 4\}$.
  - Za $d = 3$, kontruisana suma po stanjima je upravo Jeterov model.
  - Za $d = 4$, poklapa sa Porterovom TKTP za $d = 4$ i $n = 2$.
- Kako bismo proverili da li je konstruisana suma po stanjima zaista topološke prirode, analiziraćemo njeno ponašanje pri **Pahnerovim potezima** – dobijeno je da je $2BF$ suma po stanjima *topološka invarijanta* mnogostrukosti.
  - *Žireli, Pfajfer i Popesku,* arXiv: 0708.3051..

$3BF$ suma po stanjima

- Formulišemo $3BF$ sumu po stanjima za klasično $3BF$ dejstvo u slučaju generalne semistriktne 3-grupe i 4-dimenzionalne prostorvremenske mnogostrukosti.
  - Podudara se sa Porterovom apstraktnom definicijom TKTP za slučaj $d = 4$ i $n = 3$.
- Dobijamo da je *topološka invarijanta* mnogostrukosti.
  - *TR i M. Vojinović,* arXiv: 2201.02572.

Drugi i treći korak kvantizacione procedure

- ↪ Konstruisana je suma po stanjima koja odgovara $3BF$ topološkoj teoriji.
- ↪ Međutim, da bi završili **drugi korak kovarijantne kvantizacione procedure spinske pene**, neophodne su generalizacije Peter-Vejl i Planšarel teorema za slučajeve 2-grupe i 3-grupe, matematički rezultati koji za sada predstavljaju otvorene probleme.
- ↪ Ove teoreme treba da **obezbede dekompoziciju funkcija na** 3**-grupi** u sumu po odgovarajućim ireducibilnim reprezentacijama 3-grupe.
- ↪ Na ovaj način se **određuje spektar oznaka simpleksa triangulacije**, tj. domen vrednosti polja koja žive na simpleksima triangulacije, kao što je to urađeno u slučaju BF sume po stanjima.
- ↪ **Trenutni pokušaji** privođenja drugog koraka kvantizacije uopštenih BF teorija u okviru viših gejdž teorija, se svode na **pogađanje ireducibilnih reprezentacija** 2-grupa.
- ↪ Ovaj rezultat otvara put ka **trećem i finalnom koraku kovarijantne kvantizacione procedure i formulaciji kvantne teorije gravitacije i materije Standardnog Modela** nametanjem odgovarajućih ograničenja na varijable modela modifikacijom amplituda sume po stanjima.

Zaključak

- **Prvi korak kovarijantne kvantizacione procedure spinske pene. Klasična teorija.** — Uspešno su formulisana $3BF$ dejstva sa vezama koje opisuju gravitaciono i Jang-Milsovo, skalarno i Dirakovo polje.
- **Gejdž grupa simetrije topološkog $3BF$ dejstva.** — Urađena je kompletna Hamiltonova analiza $3BF$ dejstva i nađen je generator gejdž transformacija. Dobijeno je da je $3BF$ teorija invarijantna na *pet vrsta gejdž transformacija*: *G-gejdž, H-gejdž, L-gejdž, M-gejdž i N-gejdž transformacije*.
- **Drugi korak kovarijantne kvantizacione procedure spinske pene.** — Konstruisana je $3BF$ **suma po stanjima** i dokazano je da je invarijantna na Pahnerove poteze, tj. da je topološka invarijanta mnogostrukosti.

Hvala na pažnji!

$3BF$ DEJSTVA SA VEZAMA

Gravitacija

A. Miković i M. Vojinović, arXiv: 1110.4694.

↪ Ukršteni modul $(H \xrightarrow{\partial} G\,, \triangleright)$:

- $G = SO(3,1)\,, \qquad H = \mathbb{R}^4\,,$
- $M_{ab} \triangleright P_c = [M_{ab}, P_c]\,,$
- $\partial(\tau_\alpha) = 0\,.$

↪ 2-koneksija (α, β): $\boxed{\alpha = \omega^{ab} M_{ab}\,, \qquad \beta = \beta^a P_a\,.}$

↪ 2-krivina $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$: $\boxed{\mathcal{F} = R^{ab} M_{ab}\,, \quad \mathcal{G} = \nabla\beta P_a\,.}$

↪ Topološko dejstvo:

$$\boxed{S_{2BF} = \int_{\mathcal{M}_4} B^{ab} \wedge R_{ab} + e_a \wedge \nabla\beta^a\,.}$$

↪ Dejstvo sa vezama:

$$\boxed{S = \int_{\mathcal{M}_4} B^{ab} \wedge R_{ab} + e_a \wedge \nabla\beta^a - \lambda_{ab} \wedge \left(B^{ab} - \frac{1}{16\pi l_p^2} \varepsilon^{abcd} e_c \wedge e_d\right).}$$

Gravitacija i $SU(N)$ Jang-Milsovo polje

TR i M. Vojinović, arXiv: 1904.07566.

↪ Ukršteni modul $(H \xrightarrow{\partial} G, \triangleright)$:

- $G = SO(3,1) \times SU(N)\,, \qquad H = \mathbb{R}^4\,,$
- $M_{ab} \triangleright P_c = [M_{ab}, P_c]\,, \quad \tau_I \triangleright P_a = 0\,,$
- $\partial(\tau_I) = 0\,.$

↪ 2-koneksija (α, β): $\boxed{\alpha = \omega^{ab} M_{ab} + A^I \tau_I\,, \qquad \beta = \beta^a P_a\,.}$

↪ 2-krivina $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$: $\boxed{\mathcal{F} = R^{ab} M_{ab} + F^I \tau_I\,, \quad \mathcal{G} = \nabla\beta P_a\,.}$

↪ Topološko dejstvo: $\boxed{S_{2BF} = \int_{\mathcal{M}_4} B^{ab} \wedge R_{ab} + B^I \wedge F_I + e_a \wedge \nabla\beta^a\,.}$

↪ Dejstvo sa vezama:

$$\boxed{\begin{aligned} S = \int_{\mathcal{M}_4} & B^{ab} \wedge R_{ab} + B^I \wedge F_I + e_a \wedge \nabla\beta^a - \lambda_{ab} \wedge \left(B^{ab} - \frac{1}{16\pi l_p^2} \varepsilon^{abcd} e_c \wedge e_d \right) \\ & + \lambda^I \wedge \left(B_I - \frac{12}{g} M_{abI} e^a \wedge e^b \right) + \zeta^{abI} \left(M_{abI} \varepsilon_{cdef} e^c \wedge e^d \wedge e^e \wedge e^f - g_{IJ} F^J \wedge e_a \wedge e_b \right). \end{aligned}}$$

$$\text{Dirakovo polje} \quad \boxed{D = \psi^{\alpha} P_{\alpha} + \bar{\psi}_{\alpha} P^{\alpha}}$$

↪ 2-ukršteni modul $(L \xrightarrow{\delta} H \xrightarrow{\partial} G\,, \triangleright\,, \{\_\,,\_\})$:

- $G = SO(3,1)\,, \qquad H = \mathbb{R}^4\,, \qquad L = \mathbb{R}^8(\mathbb{G})\,,$
- $M_{ab} \triangleright P_c = [M_{ab}, P_c]\,, \qquad M_{ab} \triangleright P_{\alpha} = \frac{1}{2}(\sigma_{ab})^{\beta}{}_{\alpha} P_{\beta}\,, \qquad M_{ab} \triangleright P^{\alpha} = -\frac{1}{2}(\sigma_{ab})^{\alpha}{}_{\beta} P^{\beta}\,,$
- $\partial(P_a) = 0\,, \qquad \delta(T_A) = 0\,, \qquad \{P_a\,, P_b\} = 0\,.$

↪ 3-koneksija $(\alpha\,, \beta\,, \gamma)$: $\boxed{\alpha = \omega^{ab} M_{ab}\,, \qquad \beta = \beta^a P_a\,, \qquad \gamma = \gamma^{\alpha} P_{\alpha} + \bar{\gamma}_{\alpha} P^{\alpha}}$.

↪ 3-krivina $(\mathcal{F}\,, \mathcal{G}\,, \mathcal{H})$:

$$\mathcal{F} = R^{ab} M_{ab}\,, \qquad \mathcal{G} = \nabla \beta^a P_a\,,$$
$$\mathcal{H} = \left(\mathrm{d}\gamma^{\alpha} + \frac{1}{2}\omega^{ab}(\sigma_{ab})^{\alpha}{}_{\beta}\gamma^{\beta}\right)P_{\alpha} + \left(\mathrm{d}\bar{\gamma}_{\alpha} - \frac{1}{2}\omega^{ab}\bar{\gamma}_{\beta}(\sigma_{ab})^{\beta}{}_{\alpha}\right)P^{\alpha} \equiv (\overrightarrow{\nabla}\gamma)^{\alpha} P_{\alpha} + (\bar{\gamma}\overleftarrow{\nabla})_{\alpha} P^{\alpha}\,.$$

↪ Topološko dejstvo:

$$S_{3BF} = \int_{\mathcal{M}_4} B^{ab} \wedge R_{ab} + e_a \wedge \nabla \beta^a + (\bar{\gamma}\overleftarrow{\nabla})_{\alpha} \psi^{\alpha} + \bar{\psi}_{\alpha} (\overrightarrow{\nabla}\gamma)^{\alpha}\,.$$

Vajlovo i Majorana spinorsko polje $\boxed{D = \psi_\alpha P^\alpha + \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} P_{\dot{\alpha}}}$

↪ 2-ukršteni modul $(L \overset{\delta}{\to} H \overset{\partial}{\to} G\,, \triangleright\,, \{\_\,,\_\})$:

- $G = SO(3,1)\,, \qquad H = \mathbb{R}^4\,, \qquad L = \mathbb{R}^4(\mathbb{G})\,,$
- $M_{ab} \triangleright P_c = [M_{ab}, P_c]\,, \qquad M_{ab} \triangleright P^\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_{ab})^\alpha{}_\beta P^\beta\,, \qquad M_{ab} \triangleright P_{\dot{\alpha}} = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{ab})^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} P_{\dot{\beta}}\,,$
- $\partial(P_a) = 0\,, \qquad \delta(T_A) = 0\,, \qquad \{P_a\,, P_b\} = 0\,.$

↪ 3-koneksija $(\alpha\,,\beta\,,\gamma)$: $\boxed{\alpha = \omega^{ab} M_{ab}\,, \qquad \beta = \beta^a P_a\,, \qquad \gamma = \gamma_\alpha P^\alpha + \bar{\gamma}^{\dot{\alpha}} P_{\dot{\alpha}}\,.}$

↪ 3-krivina $(\mathcal{F}\,,\mathcal{G}\,,\mathcal{H})$:

$$\boxed{\begin{gathered}\mathcal{F} = R^{ab} M_{ab}\,, \qquad \mathcal{G} = \nabla\beta^a P_a\,, \\ \mathcal{H} = \left(\mathrm{d}\gamma_\alpha + \frac{1}{2}\omega^{ab}(\sigma^{ab})^\beta{}_\alpha \gamma_\beta\right)P^\alpha + \left(\mathrm{d}\bar{\gamma}^{\dot{\alpha}} + \frac{1}{2}\omega_{ab}(\bar{\sigma}^{ab})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\bar{\gamma}^{\dot{\beta}}\right)P_{\dot{\alpha}} \equiv (\vec{\nabla}\gamma)_\alpha P^\alpha + (\bar{\gamma}\overleftarrow{\nabla})^{\dot{\alpha}} P_{\dot{\alpha}}\,.\end{gathered}}$$

↪ Topološko dejstvo:

$$\boxed{S_{3BF} = \int_{\mathcal{M}_4} B^{ab} \wedge R_{ab} + e_a \wedge \nabla\beta^a + \psi^\alpha \wedge (\vec{\nabla}\gamma)_\alpha + \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \wedge (\bar{\gamma}\overleftarrow{\nabla})^{\dot{\alpha}}\,.}$$

Vajlovo i Majorana spinorsko polje $\boxed{D = \psi_\alpha P^\alpha + \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} P_{\dot{\alpha}}}$

↪ Kako bismo dobili teoriju sa odgovarajućom dinamikom Vajlovih spinora, neophodno je topološkom dejstvu dodati odgovarajuće veze, tako da je $3BF$ dejstvo sa vezama:

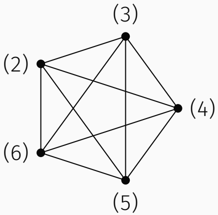
$$
\begin{aligned}
S = \int_{\mathcal{M}_4} & B^{ab} \wedge R_{ab} + e_a \wedge \nabla \beta^a + \psi^\alpha \wedge (\overrightarrow{\nabla}\gamma)_\alpha + \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \wedge (\bar{\gamma}\overleftarrow{\nabla})^{\dot{\alpha}} \\
& - \lambda_{ab} \wedge (B^{ab} - \frac{1}{16\pi l_p^2} \varepsilon^{abcd} e_c \wedge e_d) \\
& - \lambda^\alpha \wedge (\gamma_\alpha + \frac{i}{6} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \sigma^d{}_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}}) - \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} \wedge (\bar{\gamma}^{\dot{\alpha}} + \frac{i}{6} \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \bar{\sigma}^{d\dot{\alpha}\beta} \psi_\beta) \\
& - 4\pi l_p^2 \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge \beta^c (\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{d\dot{\alpha}\beta} \psi_\beta) \,.
\end{aligned}
$$

↪ Majorana polja su definisana analogno, pri čemu se dejstvu dodaje još i maseni član :

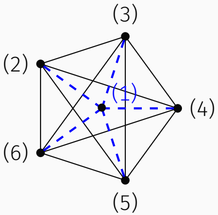
$$
-\frac{1}{12} m \varepsilon_{abcd} e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d (\psi^\alpha \psi_\alpha + \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}) \,.
$$

Pahnerovi potezi

- Analizirali smo ponašanje konstruisane sume po stanjima pri Pahnerovim potezima. Pahnerovi potezi su lokalne promene triangulacije koje čuvaju topologiju, tako da su bilo koje dve triangulacije iste mnogostrukosti povezane konačnim brojem Pahnerovih poteza.
- **U $3D$ slučaju postoje četiri Pahnerova poteza** — potezi $1 \leftrightarrow 4$ i $2 \leftrightarrow 3$ i njihovi inverzi, dok **u $4D$ postoji pet različitih Pahnerovih poteza** — potezi $3 \leftrightarrow 3$, $4 \leftrightarrow 2$ i $5 \leftrightarrow 1$ i njihovi inverzi.



$1 \leftrightarrow 5$



Desna strana

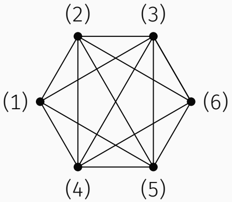
$$Z^{1\leftrightarrow 5}_{\text{right}} = |G|^{-11}|H|^{-4}|L|^{-1} \int_{G^5} \prod_{(jk)\in M_1} dg_{jk} \int_{H^{10}} \prod_{(jk\ell)\in M_2} dh_{jk\ell} \int_{L^{10}} \prod_{(jklm)\in M_3} dl_{jklm}$$

$$\cdot\left(\prod_{(jk\ell)\in M_2} \delta_G(g_{jk\ell})\right)\left(\prod_{(jk\ell m)\in M_3} \delta_H(h_{jk\ell m})\right)\left(\prod_{(jk\ell mn)\in M_4} \delta_L(l_{jk\ell mn})\right) Z_{\text{ostatak}}\,,$$

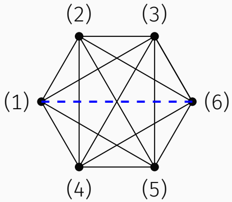
Leva strana

$$Z^{1\leftrightarrow 5}_{\text{left}} = |G|^{-5}|H|^{0}|L|^{-1}\delta_L(l_{23456})\, Z_{\text{ostatak}}\,.$$

Z_{ostatak} označava deo sume koji je isti sa obe strane pokreta, pa nije relevantan za dokaz invarijantnosti.



$2 \leftrightarrow 4$



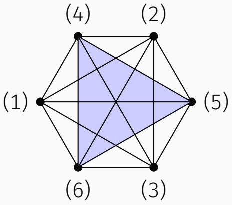
Desna strana

$$Z_{left}^{2\leftrightarrow 4} = |G|^{-8}|H|^{-1}|L|^{-1} \int_L dl_{2345}\delta_H(h_{2345}) \left(\prod_{(jk\ell mn)\in M_4} \delta_L(l_{jk\ell mn}) \right) Z_{\text{ostatak}}\,,$$

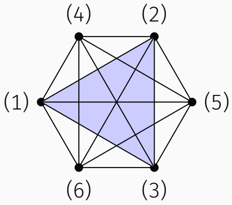
Leva strana

$$Z_{right}^{2\leftrightarrow 4} = |G|^{-11}|H|^{-3}|L|^{-1} \int_G dg_{16} \int_{H^4} dh_{126}dh_{136}dh_{146}dh_{156} \int_L dl_{1236}dl_{1246}dl_{1256}dl_{1346}dl_{1356}dl_{1456}$$
$$\left(\prod_{(jk\ell)\in M_2} \delta_G(g_{jk\ell}) \right) \left(\prod_{(jk\ell m)\in M_3} \delta_H(h_{jk\ell m}) \right) \left(\prod_{(jk\ell mn)\in M_4} \delta_L(l_{jk\ell mn}) \right) Z_{\text{ostatak}}.$$

$3 \leftrightarrow 3$ Pahnerov potez



$3 \leftrightarrow 3$



Leva strana

$$Z^{3\leftrightarrow 3}_{left} = \int_H dh_{456} \int_{L^3} dl_{1456} dl_{2456} dl_{3456} \delta_G(g_{456})\, \delta_H(h_{3456}) \delta_H(h_{2456}) \delta_H(h_{1456}) \delta_L(l_{23456}) \delta_L(l_{13456}) \delta_L(l_{12456}) Z_{\text{ostatak}}\,,$$

Desna strana

$$Z^{3\leftrightarrow 3}_{right} = \int_H dh_{123} \int_{L^3} dl_{1234} dl_{1235} dl_{1236} \delta_G(g_{123})\, \delta_H(h_{1234}) \delta_H(h_{1235}) \delta_H(h_{1236}) \delta_L(l_{12356}) \delta_L(l_{12346}) \delta_L(l_{12345}) Z_{\text{ostatak}}\,.$$